

# Resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias con Maple y Mathematica

G.M. Ortigoza Capetillo  
*Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana,*  
*e-mail: gortigoza@uv.mx*

Recibido el 13 de septiembre de 2006; aceptado el 23 de agosto de 2007

En este trabajo se presentan soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOS) mediante el uso de dos paquetes simbólicos: Maple y Mathematica. Los comandos básicos de solución de ambos paquetes son explicados mediante una serie de ejemplos representativos de un curso tradicional. Entre los ejemplos seleccionados se incluyen ecuaciones diferenciales que se resuelven con métodos como: variables separables, ecuaciones lineales, coeficientes indeterminados, variación de parámetros, etc; así como aquellas que se resuelven usando series de potencias y transformada de Laplace. Estos paquetes permiten también la solución de sistemas lineales, así como la visualización del campo de direcciones. El objetivo de este trabajo es brindar al lector una guía práctica que le permita iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales mediante el uso de Maple y Mathematica y de esta manera beneficiarse del uso de estas herramientas computacionales; así como mostrar como el uso del cómputo simbólico, al ahorrar el esfuerzo del cómputo algebraico complejo, permite enfocar la atención en ideas y conceptos importantes como: análisis cualitativo de las soluciones, comportamiento asintótico y relaciones del modelo físico con la contraparte matemática de la ecuación que lo describe.

*Descriptores:* Enseñanza; herramientas computacionales; ecuaciones diferenciales ordinarias.

In this work we present solutions of ordinary differential equations by using Maple and Mathematica. The basic commands in both packages are presented through a series of examples that show some of the advantages of using computer algebra and graphical representation in the process of teaching and learning odes.

*Keywords:* Physics Education; ordinary differential equations; Maple; Mathematica.

PACS: 01.40Fk; 02.30Hq; 01.50Ht

## 1. Introducción

En los últimos años se ha venido manifestando un interés por incorporar herramientas computacionales (calculadoras gráficas o paquetes de álgebra computacional [2, 5, 14, 23]) a las labores de docencia e investigación. Así han aparecido algunas obras que estudian la física, el álgebra lineal, el cálculo y las ecuaciones diferenciales con el apoyo de los paquetes Matlab, Maple y Mathematica [1, 27]. Más aún, en lo particular, se han venido realizando algunos estudios para estimar los beneficios y desventajas del uso de los paquetes de algebra computacional en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales [3, 17, 21].

En este trabajo se presenta el uso de Maple y Mathematica para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos paquetes son una herramienta didáctica valiosa, ya que además de proveer de visualizaciones y cómputo simbólico cuentan con funciones específicas para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo de este trabajo es brindar al lector una introducción práctica a los comandos básicos en Maple y Mathematica para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias y mostrar, mediante una serie de ejemplos, algunas de las ventajas de la aplicación de estos paquetes a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias, así como las conexiones físicas de algunos modelos y la contraparte matemática de sus ecuaciones [9, 10].

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sec. 2 se presenta la sintaxis de los comandos básicos para resolver EDOS en Maple y Mathematica; la Sec. 3 muestra mediante una serie de ejemplos el uso de estos comandos pa-

ra resolver EDOS, así mismo se presentan cuestionamientos y comentarios dirigidos a iniciar la reflexión de los estudiante sobre algunos temas importantes y finalmente la Sec. 4 presenta las conclusiones de este trabajo.

## 2. Comandos básicos para resolver ecuaciones diferenciales en Maple y Mathematica

En esta sección mostraremos el uso de algunos comandos básicos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en Maple y Mathematica [9, 10].

### 2.1. El comando *dsolve* en Maple y Mathematica

El comando principal para la solución de odes es **dsolve**, veamos así sus diferentes sintaxis en Maple y Mathematica:

#### Sintaxis en Maple

**dsolve(EDO)**

**dsolve(EDO, y(x), opciones)**

**dsolve(EDO, CIs, y(x), opciones)**

Parámetros:

EDO - ecuación diferencial ordinaria, o lista de edos.

y(x) - función incógnita de una variable o lista de funciones representando las incógnitas del problema.

CIs - condiciones iniciales de la forma  $y(a)=b$ ,  $D(y)(c)=d$ , ..., donde a, b, c, d son constantes.

Opciones - (opcional) dependen del tipo de ecuación y del método usado.

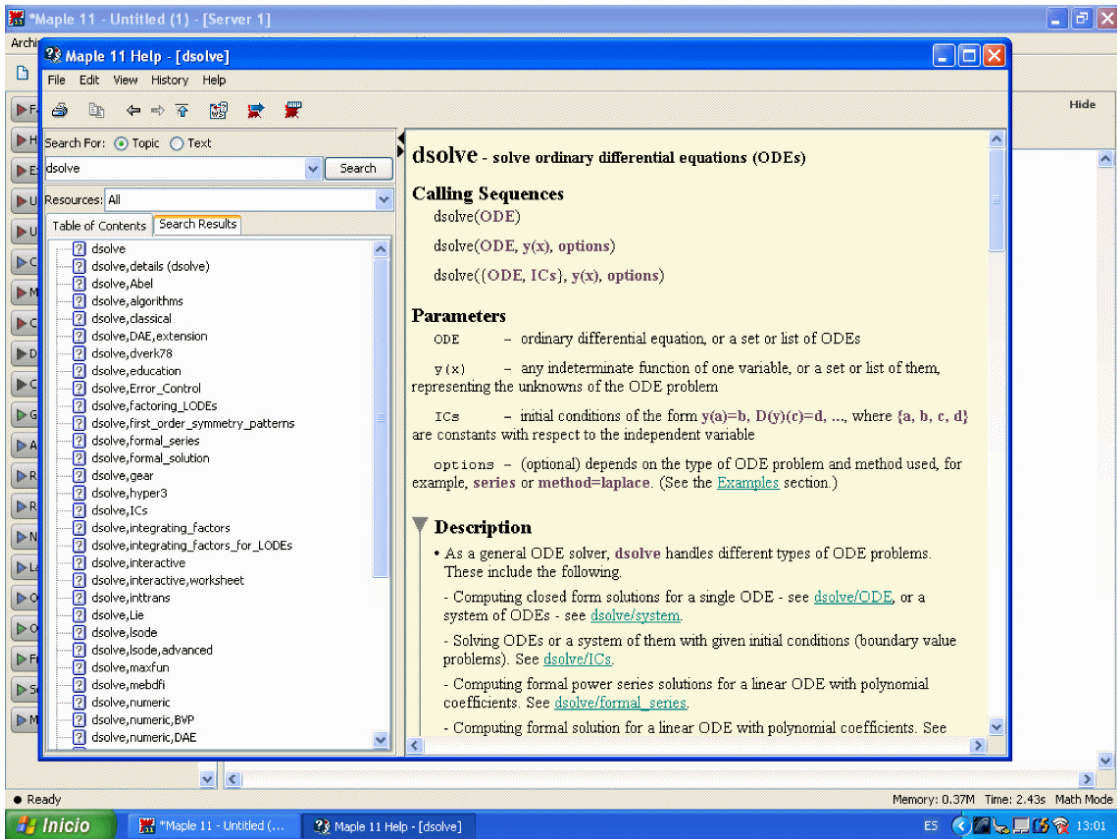


FIGURA 1. Ventana de ayuda Maple.

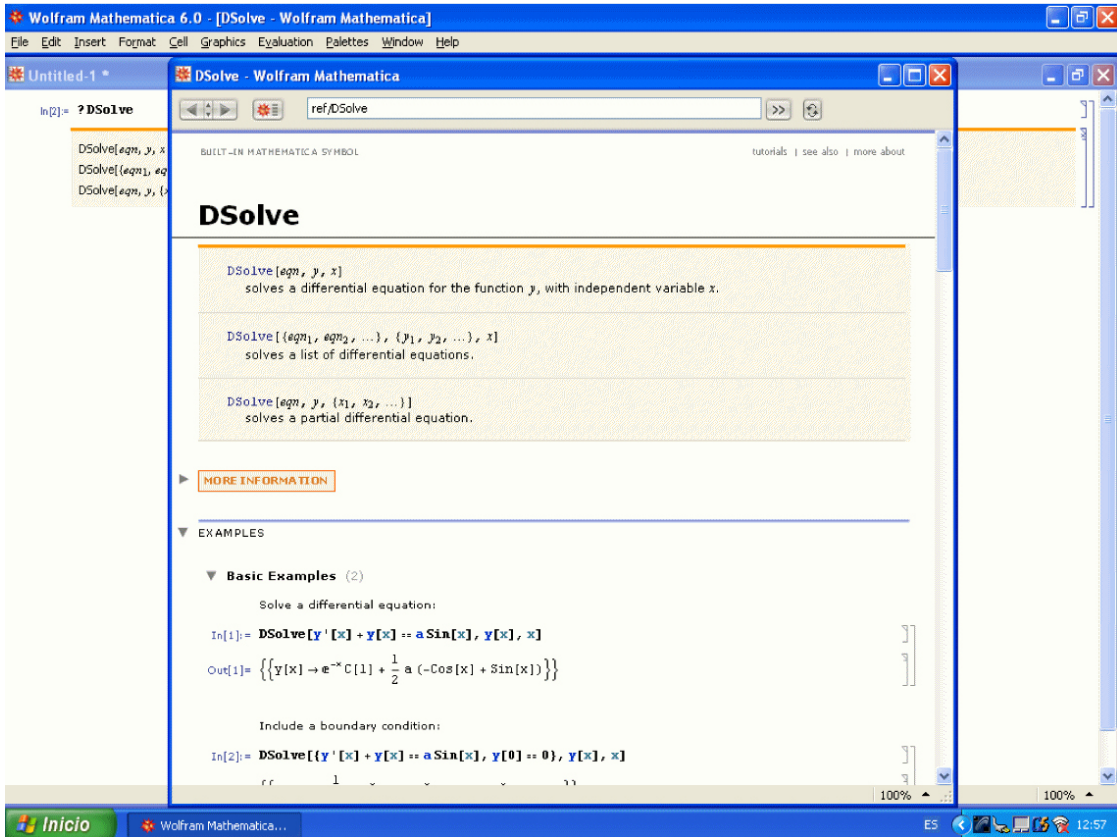


FIGURA 2. Ventana de ayuda Mathematica.

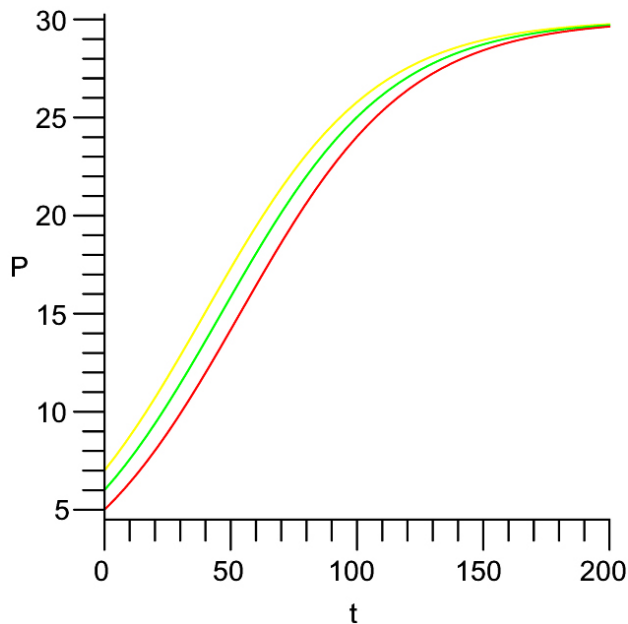


FIGURA 3. Ecuación logística con Maple.

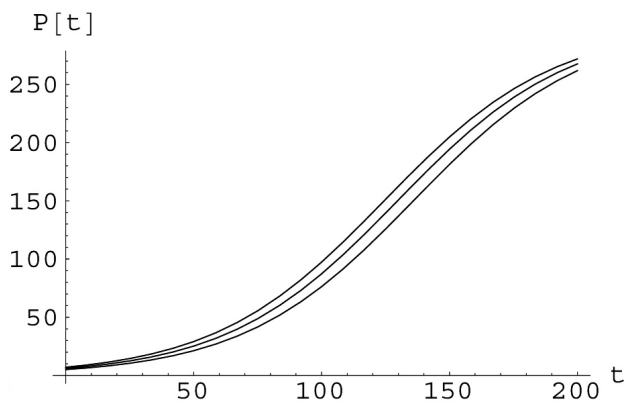


FIGURA 4. Ecuación logística con Mathematica.

Para definir derivadas usamos

$$\text{diff}(y(x), x), \quad \text{diff}(y(x), \$x2),$$

donde  $x$  es la variable independiente y  $y$  es la variable dependiente.

En Maple el comando **?dsolve** abre una ventana de ayuda que muestra la sintaxis de *dsolve*, una serie de ejemplos, detalles de los métodos de solución así como de los paquetes con que cuenta Maple para resolver ecuaciones diferenciales [18]. Esta ventana de ayuda se muestra en la Fig. 1.

### Sintaxis en Mathematica

`DSolve[eqn,y[x],x]` resuelve una ecuación diferencial para  $y[x]$ .

`DSolve[{eqn1,eqn2,...,eqn_n},{y1,y2,...,yn},x]` resuelve una lista de ecuaciones diferenciales.

Para denotar las primeras derivadas de  $y$  con respecto a  $x$  escribimos

$$y'[x], \quad y''[x],$$

en Mathematica el comando **?DSolve** nos muestra su sintaxis; para obtener una explicación más detallada hacemos click con el ratón en el símbolo  $\gg$  que aparece al final de la explicación, lo cual lanza la ventana de ayuda con información y ejemplos del uso de `DSolve` [19]. La Fig. 2 muestra la pantalla de ayuda de Mathematica.

Los ejemplos de la siguiente sección serán de utilidad para clarificar la sintaxis de `dsolve`.

### 3. Ejemplos de solución de EDOS

Los siguientes ejemplos muestran el uso del comando *dsolve* así como de algunos comandos útiles para la solución de EDOS.

#### 1. La ecuación logística.

El siguiente problema de valor inicial (pvi) es usado como un modelo de crecimiento de población [8]

$$p' = ap - bp^2, \quad p(0) = p_0 \quad (1)$$

donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes vitales de la población y  $p_0$  es la población inicial; este pvi puede resolverse analíticamente mediante el método de *variables separables*. Vamos a iniciar resolviendo este problema usando Maple, para ello definimos la ecuación diferencial:

$$\text{eqn1} := \text{diff}(p(t), t) = a \cdot p(t) - b \cdot p(t) \cdot p(t);$$

y la resolvemos usando

$$\text{sol1} := \text{dsolve}(\{\text{eqn1}, p(0) = p_0\}, p(t));$$

la solución así obtenida depende de tres parámetros,  $a$ ,  $b$  y  $p_0$ .

Supongamos que deseamos graficar la solución para coeficientes vitales fijos y diferentes condiciones iniciales. Convertimos el lado derecho de *sol1* en una expresión de  $t$  y  $p_0$  usando el comando **unapply**

$$y1 := \text{unapply}(\text{rhs}(\text{sol1}), t, p_0);$$

ahora podemos usar el comando **plot** para graficar:

$$b := 0.0001; a := 0.03; \text{plot}(\{y1(t, p_0), p_0 = 5..7\}, t = 0 .. 200, \text{labels} = [t, P]);$$

como resultado del comando anterior obtenemos la Fig. 3; note que hemos elegido valores fijos para  $a$  y  $b$ , mientras que  $p_0$

toma los valores 5, 6 ó 7 y los valores para  $t$  están definidos entre 0 y 200.

Veamos ahora cómo se resuelve este mismo pvi usando Mathematica, definimos la solución usando

```
sol1 := DSolve[{p'[t] == a p[t] - b
               p[t]^2, p[0] == p0}, p[t], t]
```

en este caso  $sol1$  es una lista cuyo único elemento es una lista, vamos así a acceder su segundo término  $sol1[[1]][[1,2]]$  para obtener la expresión de la solución y procederemos a formar una lista con el comando **Table** evaluando  $p_0$  en 5, 6 y 7.

```
lista = Table[sol1[[1]][[1, 2]], {p0, 5, 7}];
```

procedemos ahora a graficar usando

```
a = 0.03; b = 0.0001; Plot[{lista[[1]], lista[[2]], lista[[3]]}, {t,
0, 200}, AxesLabel -> {t, P[t]}]
```

la gráfica así obtenida se muestra en la Fig. 4.

Modificando los valores de los parámetros podríamos utilizar los gráficos de las soluciones para mostrar relaciones entre la parte física del modelo y su contraparte matemática que es la ecuación diferencial, por ejemplo si nos planteamos cuestionamientos tales como: *¿Cómo se comportan las soluciones obtenidas cuando  $t \rightarrow \infty$ ?, ¿se cortarán en algún punto? ¿Cuál será el comportamiento de las soluciones si  $a \ll b$ , si  $b \ll a$ ? ¿cuál es el significado físico de las condiciones anteriores?*

## 2. Consideremos la ecuación

$$y = 2xy' + \ln(y'),$$

la cual es un ejemplo de una ecuación no lineal del tipo *ecuación de Lagrange* ([16]). Para resolver con Maple usamos

```
eqn := y(x) = 2 * x * diff(y(x), x) + ln(diff(y(x), x)) : dsolve(eqn, y(x));
```

y obtenemos:

$$y(x) = -1 + \sqrt{1 + 4x \cdot C1} + \ln\left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x \cdot C1}}{x}\right),$$

$$y(x) = -1 - \sqrt{1 + 4x \cdot C1} + \ln\left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x \cdot C1}}{x}\right).$$

Para resolver con Mathematica usamos

```
DSolve[y[x] == 2 x y'[x] + Log[ y' [x]]
       , y[x], x]
```

sin embargo en este caso Mathematica no puede proveernos con una solución [11].

La solución obtenida con Maple depende del parámetro  $C1$ . Podemos graficar las curvas solución para diferentes valores de esta constante y plantear cuestionamientos como: *¿Hay curvas que corten al eje X?, ¿Y al eje Y?* Buscando así motivar los dominios de existencia de las soluciones.

## 3. Consideremos el siguiente pvi

$$y'' + 16y = 8 \sin(4t) \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (2)$$

el cual es un ejemplo de ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, que puede resolverse usando el método de *coeficientes indeterminados* [29]. Para resolver en Maple usamos

```
eqn3 := diff(y(t), t, t) + 16 * y(t) = 8 * sin(4 * t)
```

para definir la ecuación diferencial y

$$ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0;$$

para las condiciones iniciales. Para resolver usamos

```
sol3 := dsolve({eqn3, ics}, y(t));
```

Para definir una función a partir de la solución usamos el comando **unapply** y procedemos a graficar

```
y3 := unapply(rhs(sol3), t) : plot(y3(t), t = 0..10, labels = [t, y]);
```

La Fig. 5 muestra la solución de esta ecuación diferencial.

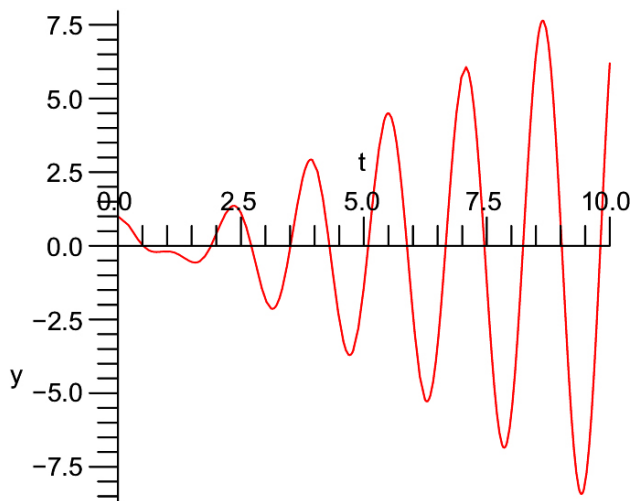


FIGURA 5. Gráfica de  $y(t) = (1-t)\cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(4t)$  con Maple.

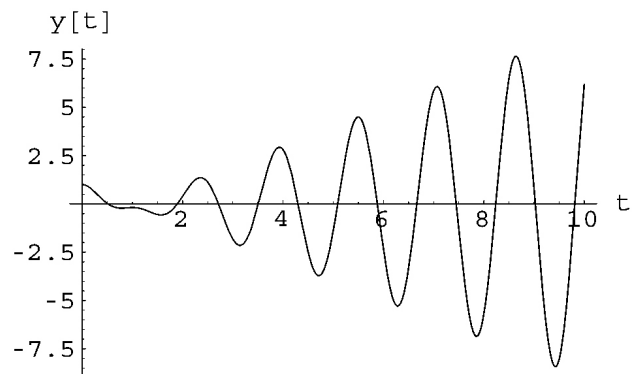


FIGURA 6. Gráfica de  $y(t) = (1-t)\cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(4t)$  con Mathematica.

Para resolver este problema en Mathematica usamos

```
sol3 = DSolve[{y''[t] + 16y[t] == 8 Sin[4 t ], y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[t], t]
```

y para graficar la solución

```
Plot[sol3[[1]][[1, 2]], {t, 0, 10}, AxesLabel -> {t, y[t]}]
```

La Fig. 6 muestra la solución obtenida con Mathematica.

Con este ejemplo podemos cuestionar el comportamiento de la solución cuando  $t \rightarrow \infty$ . Podemos también resolver el pvi  $y'' + 16y = 8 \sin(wt)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  para  $w = 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4$  y motivar el concepto de resonancia; donde podemos hacer énfasis en la influencia del modelo matemático (parámetro  $w$ ) en el modelo físico (oscilaciones crecientes).

#### 4. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) = g(t), \quad (3)$$

la cual puede resolverse usando el método de *variación de parámetros* [7]. Podemos notar que en este caso el término no homogéneo (fuente) se ha definido en forma general. Usando Maple tenemos

$$\text{eqn4} := \text{diff}(y(t), t, t, t) - \text{diff}(y(t), t, t) - \text{diff}(y(t), t) + y(t) = g(t);$$

$$\text{dsolve}(\text{eqn4}, y(t));$$

obteniendo así la solución

$$y(t) = -\int \frac{1}{4}(2t+1)g(t)e^{-t}dt e^t + \int \frac{1}{4}e^t g(t)dt e^{-t} + \int \frac{1}{2}e^{-t}g(t)dt e^t t + \_C1e^t + \_C2e^{-t} + \_C3e^t t$$

Podemos notar que los últimos tres términos contienen tres constantes de integración y corresponden a la solución general de la ecuación homogénea asociada, mientras que los tres primeros términos corresponden a una solución particular obtenida mediante la integral de una función resolvente multiplicada por la fuente.

Para resolver este problema en Mathematica usamos

```
sol = DSolve[y'''[t] - y''[t] - y'[t] + y[t] == g[t], y[t], t]; Simplify[sol[[1]][[1, 2]]].
```

Aquí hemos utilizado el comando **Simplify** para obtener una expresión simplificada de la solución la cual es muy similar a la obtenida con Maple. Podemos dejar todo el cálculo algebraico engorroso a los paquetes y resolver este problema con diferentes condiciones iniciales y a partir de las expresiones de la solución obtenidas motivar la introducción de la función de Green para un pvi [26]. Más aún, podrían probarse diferentes fuentes  $g(t)$  y observar el efecto que tienen sobre las soluciones.

## 5. Consideremos la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^4 y^{(iv)}(x) + 6x^3 y'''(x) + 9x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0, \quad (4)$$

la cual es un ejemplo de una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables. Usando Maple obtenemos

$$y(x) = -C1 \sin(\ln(x)) + -C2 \cos(\ln(x)) + -C3 \sin(\ln(x)) \ln(x) + -C4 \cos(\ln(x)) \ln(x).$$

Mientras que usando Mathematica obtenemos

```
C[1] Cos[Log[x]] + C[2] Cos[Log[x]] Log[x] + C[3] Sin[Log[x]] + C[4]
Log[x] Sin[Log[x]]
```

Aquí podemos notar la diferencia de sintaxis para denotar las constantes en Maple y Mathematica.

El método de solución de este tipo de ecuaciones se basa en proponer soluciones del tipo  $y = x^m$  para obtener una ecuación auxiliar en  $m$  [8]. Por ejemplo en Mathematica escribimos

```
y[x] = x^m; expresion = x^4 D[y[x], {x, 4}] + 6 x^3 D[y[x], {x, 3}] +
9 x^2 D[y[x], {x, 2}] + 3 x D[y[x], x] + y[x]; Simplify[expresion]
```

y obtenemos  $(1+m^2)^2 x^m$ . Nos hemos ahorrado aquí el cálculo algebraico engorroso y podemos enfocar nuestra atención en las relaciones entre la forma de las soluciones y las raíces de la ecuación auxiliar (raíces complejas repetidas).

## 6. Consideremos el pvi

$$y'' - 4y' + 4y = 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (5)$$

La parte no homogénea de la ecuación involucra funciones impulsos (Deltas de Dirac) actuando como fuentes. Este tipo de problemas se resuelve usando *transformada de Laplace* ([12]). Para resolver con Maple usamos

```
eqn6 := diff(y(t), t, t) - 4 * diff(y(t), t) + 4y(t) = 3 * Dirac(t - 1) + Dirac(t - 2);
bc6 := y(0) = 1, D(y)(0) = 1 : dsolve({bc6, eqn6}, {y(t)});
```

para obtener la solución

$$y(t) = e^{2t} - e^{2t}t + 3Heaviside(t-1)(t-1)e^{2t-2} + e^{2t-4}Heaviside(t-2)(t-2).$$

Tanto en la ecuación como en la solución aparecen funciones especiales (Dirac, Heaviside), las cuales están definidas dentro de Maple. Para resolver con Mathematica usamos

```
DSolve[{y'[t] - 4 y'[t] + 4y[t] == 3 DiracDelta[t - 1] +
DiracDelta[t - 2], y[0] == 1, y'[0] == 1}, y[t], t]
```

para obtener la solución

$$e^{2t-4} \left( (t-2)UnitStep(t-2) - e^{2(t-1)} (e^2 - 3UnitStep(t-1)) \right).$$

En este ejemplo podemos notar las diferencias en la sintaxis de las funciones Delta de Dirac y Heaviside en Maple y Mathematica. Podemos cuestionar el comportamiento de la gráfica de la solución cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 7. La ecuación

$$mx''(t) + ke^{-\alpha t}x(t) = 0 \quad (6)$$

se usa para modelar un sistema masa-resorte, donde la constante del resorte decae con el tiempo (resorte envejecido [29]). Para resolver con Maple usamos

```
eqn6 := m * diff(x(t), t, t) + k * e^{-alpha*t} * x(t) = 0 : dsolve(eqn6);
```

para obtener

$$x(t) = -C1BesselJ \left( 0, \frac{2\sqrt{k}e^{-\frac{1}{2}\alpha t}}{\alpha\sqrt{m}} \right) + -C2BesselY \left( 0, \frac{2\sqrt{k}e^{-\frac{1}{2}\alpha t}}{\alpha\sqrt{m}} \right)$$

la solución incluye funciones de Bessel J y Y las cuales están definidas dentro de Maple. Para resolver con Mathematica usamos

```
DSolve[m x''[t] + k Exp[-a t]x[t] == 0, x[t], t]
```

y obtenemos

$$BesselJ \left[ 0, \frac{2\sqrt{e^{-at}\sqrt{k}}}{a\sqrt{m}} \right] C[1] + 2BesselY \left[ 0, \frac{2\sqrt{e^{-at}\sqrt{k}}}{a\sqrt{m}} \right] C[2]$$

Podemos notar que la solución se obtiene en términos de las funciones de Bessel; la sintaxis de las funciones de Bessel en Maple y Mathematica es muy similar y solo se diferencian por el uso de paréntesis circulares o cuadrados.

Podemos considerar que  $m=1$ ,  $k=1$ , resolver para  $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$ , graficar sus soluciones y cuestionarnos acerca del comportamiento de las soluciones para los distintos valores de  $\alpha$ . Con ello podemos mostrar la relación entre el modelo matemático ( $ke^{-\alpha t}$  constante del resorte) y el comportamiento de sus soluciones.

8. Consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 18y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + 9y(t), \end{cases} \quad (7)$$

con condiciones iniciales[15]

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Para resolver con Maple usamos

```
sys := diff(x(t), t) = 3 * x(t) - 18 * y(t), diff(y(t), t) = 2 * x(t) + 9 * y(t);
sol := dsolve({x(0) = 0, y(0) = 1, sys}, {y(t), x(t)});
```

y obtenemos

$$\left\{ x(t) = -2e^{6t} \sin(3\sqrt{3}t)\sqrt{3}, \quad y(t) = e^{6t} \left( \frac{1}{3} \sin(3\sqrt{3}t)\sqrt{3} + \cos(3\sqrt{3}t) \right) \right\}.$$

Para obtener esta solución en Mathematica empleamos:

```
DSolve[{x'[t] == 3 x[t] - 18y[t], y'[t] == 2 x[t] + 9 y[t],
x[0] == 0, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, t]
```

Podemos notar así las diferencias de sintaxis para resolver sistemas en un paquete u otro. Para mostrar las soluciones podemos usar Maple y escribir

```
f1 := unapply(rhs(sol[1]), t); f2 := unapply(rhs(sol[2]), t);
```

La Fig. 7 muestra la trayectoria  $r(t) = (x(t), y(t))$  de la solución obtenida con el comando

```
plot([f2(t), f1(t), t = 0 .. 5], thickness = 2, labels=[x,y])
```

mientras que las gráficas de las variaciones de  $x$  y  $y$  con respecto a  $t$  se muestran en la Fig. 8, éstas han sido obtenidas con los comandos

```
plot([f1(t), f2(t)], t = 0 .. 5, linestyle = ([SOLID, DOT]),
thickness = 2, legend = ["x(t)", "y(t)"])
```

En la Fig. 7 observamos que la curva solución parte del punto  $(0,1)$  y girando en sentido contrario de las manecillas del reloj se aleja de este punto, los términos oscilatorios  $\sin(3\sqrt{3}t)\sqrt{3}$  y  $\cos(3\sqrt{3}t)\sqrt{3}$  de sus componentes hacen que la curva solución gire mientras que el factor  $e^{6t}$  hace que su distancia al origen crezca produciendo el alejamiento.

El sistema lineal (7) podría describir un fenómeno físico, como por ejemplo el movimiento de una partícula, así en este caso podemos observar la relación que existe entre la trayectoria de la partícula (girando y alejándose del origen) y la contraparte matemática de las expresiones analíticas de su solución (sinusoidales multiplicadas por exponenciales).

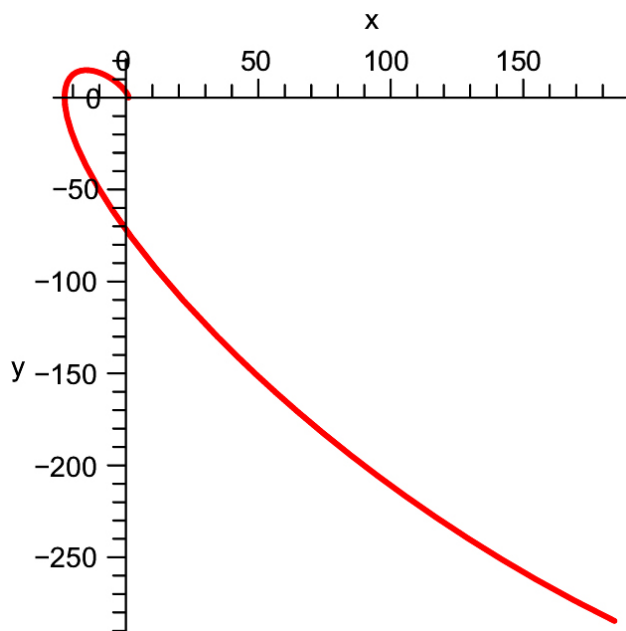


FIGURA 7. Trayectoria de la solución.

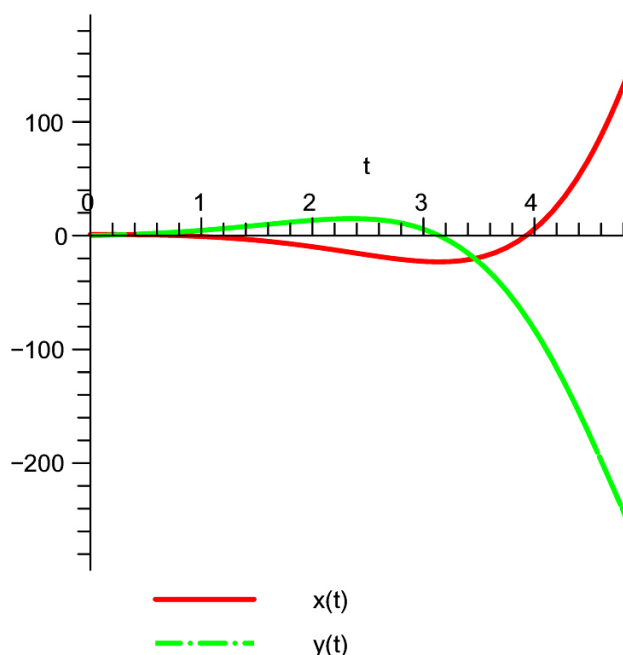


FIGURA 8. Gráficas de x(t) y y(t).

9. Consideremos la ecuación de Airy

$$y''(t) - ty(t) = 0, \tag{8}$$

la cual tiene en  $t = 0$  un punto ordinario y puede resolverse usando el método de *series de potencias* [25]. Esta ecuación modela un sistema masa-resorte, donde la constante del resorte crece de forma proporcional al tiempo [29]. Éste es un ejemplo de una ecuación reducible a la ecuación de Bessel, algunas de sus soluciones se llaman funciones de Airy y sirven para modelar la difracción de la luz [6]. Para resolver en Maple usamos

$$eqn := diff(y(t), t\$2) - t \cdot y(t) = 0 : dsolve(eqn, y(t));$$

y obtenemos

$$y(t) = \_C1AiryAi(t) + \_C2AiryBi(t).$$

De manera similar en Mathematica usamos

```
DSolve[y''[t] - t y[t] == 0, y[t], t]
```

para obtener

```
{{y[t] -> AiryAi[t] C[1] + AiryBi[t] C[2]}}
```

Las soluciones obtenidas con *dsolve* contienen las funciones de Airy  $Ai(x)$  y  $Bi(x)$ ; vamos ahora a obtener soluciones en forma de serie de potencias. En Maple usamos

$$dsolve(\{eqn, y(0) = 1, D(y)(0) = 1\}, y(x), type = series)$$

para obtener

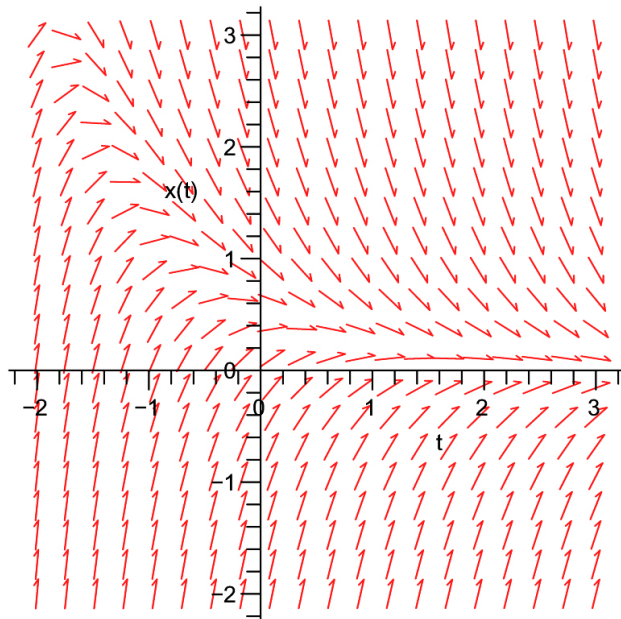
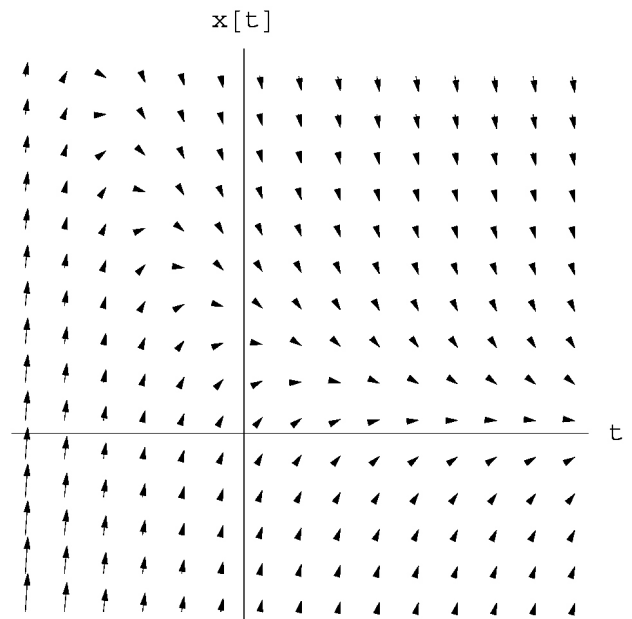
$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + O(t^6).$$

Podemos usar este ejemplo y preguntarnos *¿Cómo luce la solución para  $t < 0$  y para  $t > 0$ ?* Para un tiempo fijo (positivo o negativo) podemos comparar sus soluciones con las soluciones de  $y'' + ky = 0$ .

Cabe mencionar que hemos usado la opción **type=series** y condiciones iniciales en  $t = 0$  para obtener una solución en serie de potencias alrededor de cero; para tener una serie alrededor de  $t = 1$  usamos

$$dsolve(\{eqn, y(1) = 1, D(y)(1) = 1\}, y(t), type = series);$$



FIGURA 9. Campo de direcciones de  $x' = e^{-t} - 2x$ .FIGURA 10. Campo de direcciones de  $x' = e^{-t} - 2x$ .

y tenemos

$$y(t) = 1 + t - 1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{8}(t-1)^4 + \frac{1}{24}(t-1)^5 + O((t-1)^6)$$

Veamos ahora como se obtienen estas soluciones en Mathematica. Primero expandimos la ecuación diferencial en series de potencias:

```
odeseries = Series[y''[t] - t y[t], {t, 0, 4}]
```

incluimos las condiciones iniciales y resolvemos para los coeficientes:

```
coeffs = Solve[{odeseries == 0, y[0] == 1, y'[0] == 1}]
```

Ahora con estos coeficientes escribimos la solución en series de potencias:

```
Series[y[t], {t, 0, 5}] /. First[coeffs].
```

y así obtenemos la serie deseada. De manera análoga para crear la solución en potencias centradas en  $t = 1$  escribimos

```
odeseries = Series[y''[t] - t y[t], {t, 1, 4}];
```

```
coeffs = Solve[{odeseries == 0, y[1] == 1, y'[1] == 1}];
```

```
Series[y[t], {t, 1, 5}] /. First[coeffs].
```

Podemos notar que, a diferencia de Maple, en Mathematica necesitamos usar más comandos para obtener la solución en series de potencias.

10. Consideremos la ecuación

$$x' = e^{-t} - 2x. \quad (9)$$

En este ejemplo mostraremos un estudio cualitativo de la solución mediante el uso del campo de direcciones [30]. Para mostrar el campo de direcciones de la ecuación diferencial en Maple usamos

```
with(DEtools); dfieldplot(diff(x(t), t) = exp(-t)-2x(t), x(t), t =
-2..3, x = -2..3);
```

Aquí utilizamos el paquete **DEtools** y en particular el comando **dfieldplot** el cual permite la visualización del campo de direcciones. La Fig. 9 muestra el resultado de este comando.

Para Mathematica usamos

```
<< Graphics`PlotField` PlotVectorField[{1, Exp[-t] - 2 x},
{t, -2, 3}, {x, -1, 2},
ScaledFuction -> (1 &), Axes -> True, Ticks -> None,
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {t, x[t]}].
```

En este caso usamos el paquete **Graphics'PlotField'** y el comando **PlotVectorField**. La Fig. 10 muestra el resultado de este comando.

Con el apoyo de las gráficas podemos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones mediante algunos cuestionamientos, tales como: *¿Cuál es el comportamiento de las curvas solución cuando  $t \rightarrow \infty$ ? ¿Depende este comportamiento de la condición inicial?*

11. Consideremos el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = y(0.75 - 0.5x - y), \end{cases}$$

el cual modela un sistema depredador-presa [25]. Visualizaremos su campo de direcciones. En Maple usamos `dfieldplot([diff(x(t), t) = x(t)*(1-x(t)-y(t)), diff(y(t), t) = y(t)*(0.75-0.5*x(t)-y(t))], [x(t), y(t)], t = 0 .. 1, x = 0 .. 1.5, y = 0 .. 1);` y obtenemos así el campo mostrado en la Fig. 11.

Para visualizar en Mathematica usamos

```
<< Graphics'PlotField' PlotVectorField[{x(1 - x - y), y(0.75 - 0.5x - y)}, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 1.5}, ScaledFunction -> (# + 5# &), Axes -> True, PlotPoints -> 18, AxesLabel -> {x, y}]
```

La Fig. 12 muestra el resultado de esta instrucción.

Apoyados en las gráficas podemos hacer algunas observaciones: algunas flechas tienden a acumularse en el punto (0.5,0.5), hay flechas que parten del origen alejándose de él, flechas que se mueven sobre el eje y de arriba hacia abajo chocan en (0, 0.75) con flechas que van de abajo hacia arriba mientras que las flechas que se mueven sobre el eje x de izquierda a derecha chocan en (1,0) con las provenientes de derecha a izquierda. Podemos analizar de manera analítica este ejemplo, para ello procedemos a encontrar los puntos críticos de este sistema; con Maple usamos

```
sys := x*(1-x-y), y*(.75-.5*x-y): pts := solve({sys}, {x, y})
```

para obtener

```
{y = 0., x = 0.}, {x = 0., y = 0.7500000000}, {y = 0., x = 1.}, {x = 0.5000000000, y = 0.5000000000}.
```

Esta misma solución se puede obtener en Mathematica con:

```
pts = Solve[{x*(1 - x - y) == 0, y*(0.75 - 0.5*x - y) == 0}, {x, y}]
{{x -> 0., y -> 0.}, {x -> 0., y -> 0.75}, {x -> 0.5, y -> 0.5}, {x -> 1., y -> 0.}}
```

Si deseamos clasificar estos puntos críticos debemos calcular la matriz jacobiana del sistema, evaluarla en estos puntos y calcular sus valores propios [24]. En Maple usamos

```
with(linalg): derivada := [[diff(sys[1], x), diff(sys[1], y)], [diff(sys[2], x), diff(sys[2], y)]]
```

para escribir la matriz jacobiana y obtenemos los valores propios usando

```
eigenvals(subs(pts[1], derivada))
0.7500000000, 1.
eigenvals(subs(pts[2], derivada))
-0.7500000000, 0.2500000000
eigenvals(subs(pts[3], derivada))
-1., 0.2500000000
eigenvals(subs(pts[4], derivada))
-0.1464466094, -0.8535533906
```

Hemos utilizado el comando **eigenvals** para hallar los valores propios, este comando pertenece al paquete **linalg**, el comando **subs** nos ha permitido substituir los valores de *pts* en la matriz *derivada*.

Estos mismo cálculos pueden realizarse en Mathematica de la siguiente manera:

```
sys1 = x*(1 - x - y); sys2 = y*(0.75 - 0.5*x - y);
A = {{D[sys1, x], D[sys1, y]}, {D[sys2, x], D[sys2, y]}};
Eigenvalues[A /. pts[[1]]] {1., 0.75} Eigenvalues[A /. pts[[2]]] {-0.75, 0.25}
Eigenvalues[A /. pts[[3]]] {-0.853553, -0.146447}
Eigenvalues[A /. pts[[4]]] {-1., 0.25}
```

De los resultados obtenidos podemos concluir que (0,0) es un nodo inestable, (0,0.75) y (1,0) son puntos silla y (0.5,0.5) un nodo asintóticamente estable. Aquí el cómputo simbólico ha hecho posible reducir los cálculos algebraicos y hemos podido corroborar las observaciones hechas a partir de las gráficas con los cálculos analíticos, más aún podemos usar este ejemplo para cuestionar la relación de estos puntos críticos con el modelo físico depredador-presa.

12. Consideremos el pvi

$$y' = \sin(y^2), \quad y(0) = 1,$$

si intentamos resolver este problema con Maple obtenemos

$$y(x) = \text{RootOf} \left( x + \int_b^z \frac{1}{\sin(a^2)} da - \int_b^1 \frac{1}{\sin(a^2)} da \right),$$

mientras que con Mathematica no obtenemos solución alguna. Sin embargo esta ecuación no lineal puede *resolverse numéricamente*. En Maple podemos agregar la opción **type=numeric** a **dsolve** y obtener una solución de la siguiente manera:

```
with(plots): sol := dsolve({y(0) = 1, (D(y))(x) = sin(y(x)^2)},
type = numeric, range = -5 .. 5): odeplot(sol, thickness = 2)
```

observemos que hemos definido el rango de la variable independiente de -5 a 5 y mediante el comando **odeplot** podemos graficar la solución obtenida. La Fig. 13 muestra esta solución.

Para resolver numéricamente Mathematica cuenta con la función **NDSolve**, cuya sintaxis es muy similar a **DSolve**, salvo porque la solución numérica se define en un intervalo definido. Para nuestro ejemplo podemos usar

```
sol = NDSolve[{y'[x] == Sin[y[x]^2], y[0] == 1},
y[x], {x, -5, 5}]; Plot[sol[[1]][[1, 2]], {x, -5, 5}]
```

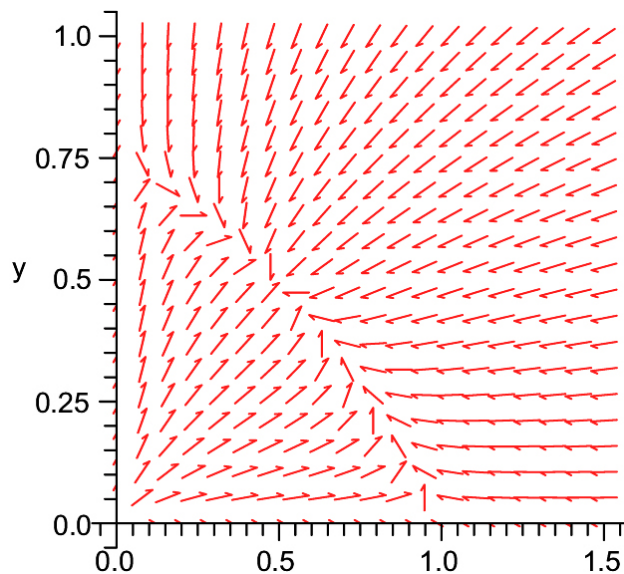


FIGURA 11. Campo de direcciones de un sistema no lineal.

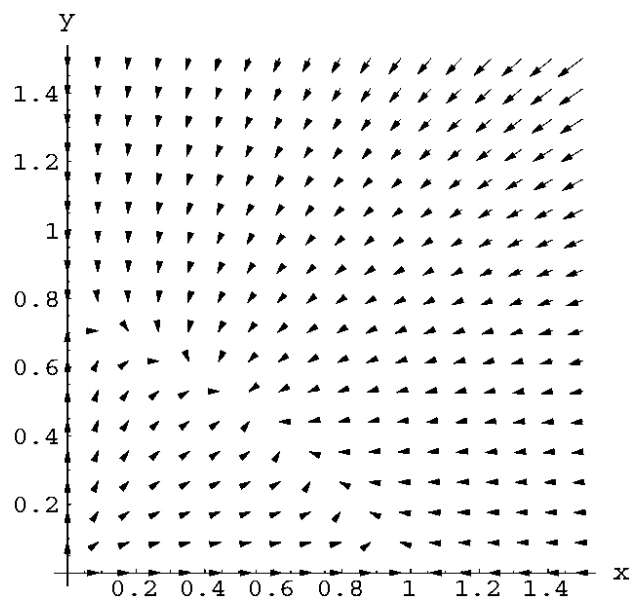


FIGURA 12. Campo de direcciones de un sistema no lineal.

y obtener una gráfica similar a la anterior. Cuando resolvemos una ecuación diferencial de forma numérica, debemos estar alertas y tener en cuenta que la exactitud de nuestra aproximación puede ser afectada por diversas fuentes de errores locales, globales y la estabilidad de la ecuación.

En este ejemplo podríamos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones mediante los cuestionamientos: ¿Cómo se comporta la solución cuando  $x \rightarrow \infty$ ?, ¿y cuando  $x \rightarrow -\infty$ ?, ¿y si cambiamos la condición inicial?

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado el uso de los comandos básicos *dsolve*, *DSolve* y *NDSolve* para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias; se ha elegido una serie de problemas representativos de un curso tradicional de EDOS. El objetivo principal de este trabajo es brindar al lector una guía práctica que le permita iniciar el estudio de la ecuaciones diferenciales mediante el uso de Maple y Mathematica. Se hacen notar las ventajas o desventajas de usar un paquete u otro en función de la sencillez o complejidad de los comandos utilizados para obtener o presentar las soluciones y no en función de la efectividad para hallar soluciones ni del tiempo de cómputo requerido para obtenerlas [11]. Se han mostrado algunas de las ventajas del uso de paquetes de cómputo simbólico y en particular de sus opciones gráficas para fortalecer la enseñanza de conceptos importantes. La lista de ejemplos dados, los cuestionamientos así como los comentarios son limitados y más bien deben considerarse como punto de partida para que el lector interesado pueda escribir en Maple y Mathematica ejemplos de interés específico así como proyectos de clase [13, 20]. En este trabajo se usaron las versiones Maple 11 y Mathematica 6.

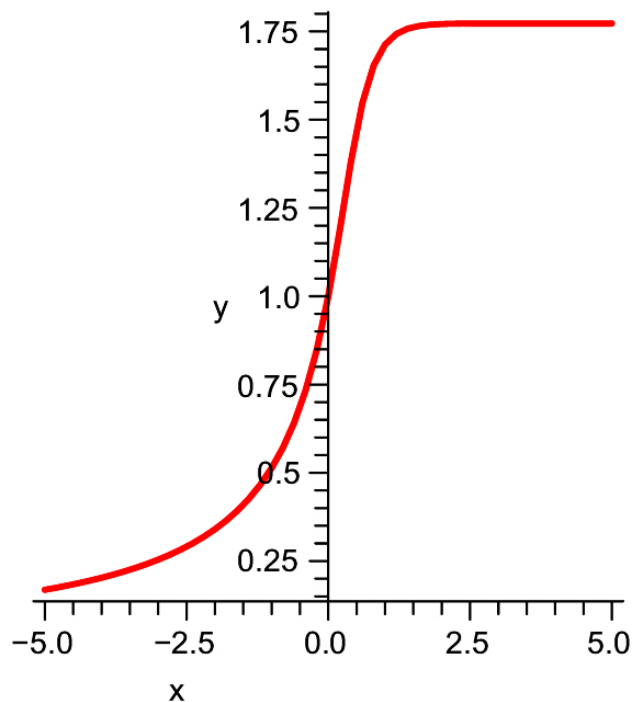


FIGURA 13. Solución numérica.

Es de gran acierto enriquecer el contenido temático de los cursos de ecuaciones diferenciales incluyendo la solución de ecuaciones mediante el uso de paquetes computacionales [22]; sin embargo a juicio del autor, es recomendable que el alumno los utilice como herramienta para realizar cálculos o ejemplificar conceptos gráficos toda vez que ya ha aprendido las técnicas de solución de ecuaciones y es capaz de realizar los cálculos a mano [4]. Cabe resaltar el esfuerzo que debe realizar el instructor para elegir ejemplos, ejercicios y proyectos de clase adecuados a los conceptos que se desee enseñar [28].

1. M.L. Abell y J.P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica* (Elsevier Science & Technology Books, 2004).
2. G. Adie *Differential Equations in Practical physics teaching* Proceedings of ICTMT4, 1999.
3. S. Arslan, H. Chaachoua y C. Laborde, *Reflexions on the teaching of differential equations: what effects of a teaching to algebraic dominance?* disponible en: <http://www.icme-organisers.dk/tsg12/papers/arslan-tsg12.pdf>
4. M. Artigue, *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?*, Relime vol 1, num 1, Marzo 1998.
5. M. Beaudin, *Teaching mathematics to engineering students with hand-held technology*, 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, July 2002.
6. R. Borelli y C.S. Coleman, *Ecuaciones Diferenciales una perspectiva de modelación* (Oxford 2002).
7. W.E. Boyce y R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th ed (John Wiley & Sons 2001).
8. M. Braun, *Differential Equations and their applications* (Springer Texts in Applied Mathematics, 1993).
9. K.R. Combes, B.R. Hunt, R.L. Lipsman, J.E. Osborn y G.J. Stuck, *Differential Equations with Maple*, second edition (John Wiley and sons, inc, 1997).
10. K.R. Combes, B.R. Hunt, R.L. Lipsman, J.E. Osborn y G.J. Stuck, *Differential Equations with Mathematica*, second edition (John Wiley and sons, inc, 1998).
11. comparison, [www.csg.uwaterloo.ca/ecterrab/odetools/comparison.html](http://www.csg.uwaterloo.ca/ecterrab/odetools/comparison.html)
12. S.J. Farlow, *An introduction to Differential Equations and their applications* (McGraw-Hill 1994).
13. A.P. Ferzola, *Differential equations and the Computer: Using*

- Maple as a resource for Mathematical Information* (University of Scranton, PA, 1996).
14. J.L. Galán, M.A. Galán, A. Gálvez y A.J. Jiménez, *Computer Algebra systems: A basic tool for teaching mathematics in engineering* 3rd international Conference on multimedia and information and communication technologies in education, 2005.
  15. J. Heading, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Selección de Problemas Resueltos Serie Limusa, 1982.
  16. A. Kiseliiov, M. Krasnov y G. Makarenko, *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, MIR, 1968.
  17. O.N. Kwon, *Towards Inquiry-oriented mathematics instruction in the university*, Proceedings of Kaist Symposium on Enhancing University Mathematics Teaching, may 2005.
  18. Maplesoft, <http://www.maplesoft.com>
  19. Mathematica, <http://www.wolfram.com>
  20. R. Nurmiainen, *Mathematica Based package for studying ordinary differential equations and for analyzing the learning process*, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology.
  21. C.L. Rasmussen, *Qualitative problem solving strategies of first order differential equations the case of Amy* disponible en <http://archives.math.utk.edu/CTM/FIFTH/Rasmussen/paper.pdf>
  22. H.J. Ricardo, *Resources for a Modern Differential Equations Course*, disponible en: <http://archives.math.utk.edu/CTM/FIFTH/Ricardo/paper.html>
  23. C.D. Rielly, *The application of computer algebra software in the teaching of engineering mathematics* The Higher Education academy engineering subject center.
  24. D.A. Sánchez, *Ordinary Differential Equations and Stability theory: An introduction* (Dover, 1979).
  25. D.A. Sanchez, R.C. Allen y W.T. Kyner, *Differential Equations an introduction* (Addison Wesley, 1984).
  26. S.M. Walas, *Modelling with Differential Equations in Chemical Engineering*, Butterworth-Heinemann Series in chemical engineering, 1991.
  27. F. Wang, *Physics with MAPLE: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics* (Wiley, John & Sons Inc, 2006).
  28. T.G. Wangler, *Paradigm Lost: A modern approach to teaching ordinary differential equations*, Department of Mathematics and Computer Science Illinois Benedictine Collage.
  29. D.G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, Thompson Learning, 2002.
  30. D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations* (Academic Press, 1997).